Научная статья
УДК 517.5
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-96-118

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ L_2-НОРМЫ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ИНТЕРПОЛИРУЕМЫХ ДАННЫХ

Сергей Игоревич Новиков

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН),
Екатеринбург, Россия

Sergey.Novikov@imm.uran.ru; https://orchid.org/0009-0002-5945-7614

Аннотация

Найдено точное решение задачи интерполяции на произвольном конечном отрезке $[a,b]$ с минимальным значением L_2-нормы линейного дифференциального оператора на интерполянтах для класса конечного числа интерполируемых данных из единичного шара пространства l_2^N. Интерполирование производится в узлах произвольной фиксированной N-точечной сетки $\Delta_N: \ x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ на $[a,b]$. Полученный результат выражается через максимальное собственное число некоторой квадратной матрицы и её определитель.

Ключевые слова и фразы

интерполяция, $\mathcal{L}$-сплайн, интерполяционная задача типа Фавара, неосцилляция, линейный дифференциальный оператор, функция Грина, воспроизводящее ядро.

Для цитирования

Новиков С.И. Интерполяция с минимальным значением L_2-нормы линейного дифференциального оператора для конечного числа интерполируемых данных // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 96-118. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-96-118

Interpolation with minimal value of L_2-norm of linear differential operator for finite collections of data

Sergey I. Novikov

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics the Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Abstract

An exact solution is found to the problem of interpolation on an arbitrary finite interval $[a, b]$ with the smallest L_2-norm of the linear differential operator for finite collections of data from the unit ball of the space l_2^N. Interpolation is performed at knots of an arbitrary fixed N-point grid $\Delta_N: \ x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ on $[a, b]$. The obtained result is expressed in terms of the largest eigenvalue of a certain square matrix and its determinant.

Keywords

interpolation, $\mathcal{L}$-spline, Favard type interpolation problem, disconjugacy, linear differential operator, the Green function, reproducing kernel.

For citation

Novikov S. I. Interpolation with minimal value of L_2-norm of linear differential operator for finite collections of data // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 96-118. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-96-118

§ 1. Введение и постановка задачи

Пусть N – произвольное натуральное число,

$$\mathfrak{M}_N = \left\{ z \in \mathbb{R}^N : z = \{z_j\}_{j=1}^N, \ \left(\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \right)^{1/2} \le 1 \right\}$$

— класс конечных вещественных последовательностей с евклидовой нормой. Он является единичным шаром с центром в начале координат в пространстве l_2^N.

Через $[a, b]$ обозначаем фиксированный конечный промежуток и пусть

$$\Delta_N : \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_N, \quad (x_1 > a, \ x_N < b)$$

— любая фиксированная N-точечная сетка на этом промежутке.

Пусть $y = y(x)$ — m-раз дифференцируемая вещественная функция,

$$\mathcal{L}_m y(x) = y^{(m)}(x) + p_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + p_{m-1}(x)y'(x) + p_m(x)y(x) \quad (1.1)$$

— произвольный линейный дифференциальный оператор порядка m с коэффициентами $p_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Как обычно, через $L_2[a, b]$ обозначается пространство вещественных функций, интегрируемых с квадратом на промежутке $[a, b]$, снабжённое стандартной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

$AC[a, b]$ — класс абсолютно непрерывных на промежутке $[a, b]$ функций, а

$$W_2^m[a, b] = \{f : \ f^{(m-1)} \in AC[a, b], f^{(m)} \in L_2[a, b]\}$$

— пространство Соболева с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^m} = \|\varphi\|_2 + \sum_{k=1}^{m} \|\varphi^{(k)}\|_2$$

или же другой эквивалентной ей нормой.

В работе изучаются следующие две задачи.

Задача 1. Для фиксированной последовательности $z = \{z_k\}_{k=1}^N \in l_2^N$ и фиксированной сетки Δ_N найти величину

$$K_{N,\mathcal{L}_m}(z) = \inf\{\|\mathcal{L}_m f\|_2 : \quad f \in W_2^m[a, b], \ f(x_k) = z_k, \ k = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Задача 2. Вычислить величину

$$\mathcal{B}_N(\mathcal{L}_m) = \sup\Big\{K_{N,\mathcal{L}_m}(z) : \ z \in \mathfrak{M}_N\Big\}.$$

Задача 1 является одним из вариантов интерполяционной задачи типа Фавара (см., например, [1], [2], а также [3], [4] и ссылки в этих работах). Задачу 2 также можно интерпретировать как интерполяционную задачу типа Фавара, рассматриваемую для всего класса интерполируемых данных $\mathfrak{M}_N$. Постановка Задачи 2 близка к проблемам экстремальной функциональной интерполяции, которые были детально исследованы для равномерной сетки на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ в работах Ю.Н.Субботина (см. [5], [6] и др.), В.Т.Шевалдина (см. [7] и др.) и других математиков.

Обзорная статья [8] посвящена этим проблемам. Отметим, что в некоторых из указанных выше работ наряду с обычной интерполяцией в точках рассматривалась и задача интерполяции в среднем.

Хорошо известно, что конечные и разделённые разности можно оценить сверху через интерполируемые значения и узлы сетки. Однако, этот подход не позволяет получить точное решение Задачи 2.

Основное отличие постановки Задачи 2 от проблем экстремальной функциональной интерполяции состоит в том, что у нас ограничения накладываются на сами интерполируемые значения, а не на их конечные или разделённые разности.

Если $\mathcal{L}_m = D^m$ (D — оператор дифференцирования), то экстремаль в Задаче 1 известна (см., например, [9]): при $N > m$ экстремальной функцией является натуральный сплайн степени $2m-1$ минимального дефекта с узлами в точках сетки Δ_N. Подробную информацию об этом и некоторых близких к нему результатах можно также найти в [9] и приведённой там библиографии, а также в работе [3]. Задача 2 для этого дифференциального оператора была решена в работе автора [10].

Если $\mathcal{L}_m = (D-\beta_1 I)(D-\beta_2 I)\cdots(D-\beta_m I)$, где $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ — вещественные константы, I — тождественный оператор, то как показано в работе автора [11], при $N > m$ экстремальной функцией в Задаче 1 является соответствующий натуральный $\mathcal{L}$-сплайн с узлами в точках сетки Δ_N. Там же получено точное решение Задачи 2.

Определение натуральных $\mathcal{L}$-сплайнов будет дано в разделе 2 настоящей работы.

В [10] и [11] точные значения величины $\mathcal{B}_N(\mathcal{L}_m)$ вычислены через максимальное собственное значение некоторой симметричной матрицы.

Для случая двух переменных аналог Задачи 2 был рассмотрен в работе автора [12]. В качестве линейного дифференциального оператора в [12] был выбран оператор Лапласа.

Информация о других проблемах, имеющих в той или иной мере отношение к Задачам 1 и 2, содержится в заключительном разделе этой работы.

Целью настоящей работы является получить точное решение Задачи 2 для линейных дифференциальных операторов вида (1.1). При этом на сетку точек интерполяции Δ_N приходится накладывать дополнительное ограничение — сетка Δ_N должна быть "достаточно густой".

Пусть $\mathcal{L}_m$ — линейный дифференциальный оператор порядка m вида (1.1) с непрерывными на промежутке $[a,b]$ коэффициентами.
Обозначим

$$M = \max\{1, \max_{i=1,2,\dots,m} \max_{x\in[a,b]} |p_i(x)|\}$$

и условно будем говорить, что сетка Δ_N является *"достаточно густой"*, если существует разбиение полуинтервала $[x_1, x_N)$ на s непересекающихся подинтервалов $J_1, J_2, \ldots, J_s$ с длинами $0 < |J_i| < \min\{1, (mM)^{-1}\}$ такое, что по крайней мере на одном из подинтервалов такого разбиения находятся m узлов сетки Δ_N.

Нетрудно видеть, что если сетка Δ_N является равномерной, т.е. имеет постоянный шаг $h = \dfrac{x_N - x_1}{N-1}$, то её свойство быть "достаточно густой" означает, что для шага сетки h справедливо неравенство

$$h < \frac{1}{m}\ \min\left\{1, \frac{1}{mM}\right\}.$$

Настоящая работа организована следующим образом. В п.2 мы устанавливаем существование и единственность экстремали в Задаче 1 и показываем, что эта единственная экстремаль является натуральным $\mathcal{L}$-сплайном с узлами в точках сетки Δ_N. В п.3 мы мы исследуем этот натуральный $\mathcal{L}$-сплайн, а также находим фундаментальные интерполянты. В п.4 производится свед́ение Задачи 2 к проблеме нахождения максимального значения некоторой квадратичной формы на единичной сфере пространства l_2^N и завершается доказательство основного результата. В заключительном п.5 содержатся комментарии и ссылки на результаты исследований в близких задачах.

§ 2. Интерполяционная задача типа Фавара

Прежде всего убедимся в том, что для "достаточно густой" сетки Δ_N Задача 1 имеет решение, и это решение единственно. Для этого воспользуемся некоторыми известными результатами вариационной (абстрактной) теории сплайнов (см., например, [13], [14] и приведённую там библиографию).

Пусть $X,\ Y,\ Z$ — вещественные гильбертовы пространства, $T : X \to Y$, $A\ :\ X\ \to\ Z$ — линейные ограниченные операторы. Обозначим $A^{-1}(z) = \{\varphi \in X : A\varphi = z\}$ — прообраз элемента $z \in Z$ при действии оператора A, $R(T)$ — образ пространства X при действии оператора T, $R(A)$ — образ пространства X при действии оператора A, $\ker T = \{\varphi \in X :\ T\varphi = 0\}$ — ядро оператора T, $\ker A = \{\varphi \in X :\ A\varphi = 0\}$ — ядро оператора A.

Абстрактная интерполяционная задача типа Фавара — это

$$\|T\varphi\|_Y^2 \to \inf_{\varphi \in A^{-1}(z)}. \tag{2.1}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 96-118
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 96-118

Если решение задачи (2.1) существует и единственно для любого элемента $z \in Z$, то его называют вариационным (или абстрактным) сплайном.

Известно (см., например, [13, п.1.1.2.]), что выполнение четырёх условий

$$\begin{array}{ll} 1) & A^{-1}(z) \neq \emptyset \ \ \forall z \in Z, \\ 2) & R(T) \ \text{ замкнуто в } Y, \\ 3) & \ker T \bigcap \ker A = \{0\}, \\ 4) & \dim \ \ker T = m < \infty \end{array} \tag{2.2}$$

гарантирует существование и единственность решения интерполяционной задачи (2.1) для любого $z \in Z$.

Пусть X^* — пространство, сопряжённое к X, т.е. пространство всех ограниченных линейных функционалов на X; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N \in X^*$; $Z = \mathbb{R}^N$ и для каждого $\tau \in X$ полагаем $A\tau = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_N(\tau))$, т.е. A — линейный оператор, который отображает элемент $\tau \in X$ в N-мерный вектор, состоящий из значений функционалов $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ на этом элементе.

В нашем случае $X = W_2^m[a,b]$, $Y = L_2[a,b]$, $T = \mathcal{L}_m$ — линейный дифференциальный оператор (1.1) и в качестве функционалов выбираем значения функции $\tau \in X$ в точках сетки Δ_N. Таким образом,

$$A\tau = (\tau(x_1), \tau(x_2), \ldots, \tau(x_N)) \in \mathbb{R}^N.$$

Поскольку $[a,b]$ — конечный отрезок, дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ на пространстве Соболева $W_2^m[a,b]$ является ограниченным оператором.

Для того, чтобы проверить выполнение условий (2.2) для рассматриваемых дифференциальных операторов при "достаточно густой" сетке Δ_N, нам потребуется понятие неосцилляции линейных дифференциальных операторов и один известный результат, связанный с этим понятием.

Как известно (см., например, [15], [16]), линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ называется *неосциллирующим* (англ.: *disconjugate*) на некотором промежутке $[A,B]$ непрерывности его коэффициентов, если любое нетривиальное решение уравнения $\mathcal{L}_m y = 0$ имеет не более $m-1$ нулей на $[A,B]$, где каждый нуль учитывается столько раз, какова его кратность.

Неосциллирующие линейные дифференциальные операторы являются близкими по своим свойствам к оператору D^m. Отметим некоторые свойства таких дифференциальных операторов.

1) Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ является неосциллирующим на $[A,B]$ тогда и только тогда, когда существуют m строго положительных функций $v_i \in C^{(m+1-i)}[A,B]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ таких, что $\mathcal{L}_m$ имеет разложение

$$\mathcal{L}_m y = v_1 v_2 \ldots v_m \ D\frac{1}{v_m} \ D \ldots D\frac{1}{v_2} \ D\frac{1}{v_1} y, \tag{2.3}$$

где D — оператор дифференцирования и все операции проводятся справа налево.
2) Каждый линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ вида (1.1) имеет непустой интервал неосцилляции.
3) Для любых m различных точек $t_1, t_2, \ldots, t_m$ на промежутке $[A, B]$ неосцилляции линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_m$ интерполяционная задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}_m g(x) = 0, \quad g \in C^{(m)}[A, B], \\ g(t_1) = a_1, \ g(t_2) = a_2, \ldots, g(t_m) = a_m \end{cases} \tag{2.4}$$

имеет единственное решение для каждого вектора $\widehat{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Далее будет использоваться следующее

Утверждение 1. (см. [16, p. 81]). *Пусть*

$$\mathcal{L}_m y(x) = y^{(m)}(x) + p_1(x) y^{(m-1)}(x) + \ldots + p_{m-1}(x) y^{'}(x) + p_m(x) y(x)$$

— линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ непрерывны на промежутке $J = [A, B]$ и

$$M = \max\{1, \max_{i=1,2,\ldots,m} \max_{x \in J} |p_i(x)|\}, \quad \delta = \min\{1, (mM)^{-1}\}.$$

Тогда дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ является неосциллирующим на любом подинтервале из J длины $< \delta$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{L}_m$ — произвольный линейный дифференциальный оператор вида (1.1). Если сетка точек интерполяции Δ_N является "достаточно густой" , то решение Задачи 1 существует и единственно для любой конечной последовательности $\{z_k\}_{k=1}^N \in l_2^N$.*

Доказательство. Проверяем выполнение условий (2.2). Условия 1), 2) и 4) из (2.2) заведомо выполняются. Остаётся убедиться в том, что при интерполировании на "достаточно густой" сетке выполняется условие 3).

Т.к. $T = \mathcal{L}_m$ и $A\tau = (\tau(x_1), \tau(x_2), \ldots, \tau(x_N))$, то

$$\ker T \bigcap \ker A = \Big\{ \tau \in W_2^m[a, b] : \ \mathcal{L}_m \tau(x) = 0, \ \tau(x_j) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, N \Big\}$$

и достаточно установить, что N-точечная интерполяционная задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}_m \tau(x) = 0, \\ \tau(x_1) = \tau(x_2) = \ldots = \tau(x_N) = 0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Сетка Δ_N является "достаточно густой" , поэтому существует подинтервал J_{s_0}, $0 < |J_{s_0}| < \min\{1, (mM)^{-1}\}$, на котором расположены m её последовательных узлов $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}\}$. Согласно Утверждению 1 дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ вида (1.1) является неосциллирующим на J_{s_0}, поэтому интерполяционная задача (2.4) для нулевых интерполируемых данных имеет только тривиальное решение. Поскольку $\ker \mathcal{L}_m \subset W_2^m[a,b]$, тождественно равная нулю функция является единственным интерполянтом из $\ker \mathcal{L}_m$ для нулевых интерполируемых данных во всех остальных точках сетки Δ_N. Следовательно, условие 3) из (2.2) выполняется. □

Если в сетке Δ_N имеются m таких узлов, что задача интерполирования элементами подпространства $\ker \mathcal{L}_m$ однозначно разрешима, то такую m-точечную подсетку иногда называют L-набором (см, например, [14, с. 93]). Там же указано, что если число узлов исходной сетки достаточно велико, то в ней наверняка найдётся L-набор. Предположение, что сетка точек интерполяции Δ_N является "достаточно густой" , представляет собой достаточное условие, которое обеспечивает существование L-набора в зависимости от параметров дифференциального оператора $\mathcal{L}_m$.

Дифференциальные операторы $\mathcal{L}_m = D^m$ и $\mathcal{L}_m = (D - \beta_1 I)\cdots(D - \beta_m I)$, для которых, как отмечено выше, Задача 2 была решена в [10], [11], являются неосциллирующими на всей вещественной оси и, следовательно, на любом конечном промежутке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Поэтому, для них справедлива Лемма 1.

Чтобы понять, какая функция является единственным решением Задачи 1, вновь обратимся к абстрактной интерполяционной задаче типа Фавара.

Пусть на гильбертовом пространстве X задана не только норма $\|\cdot\|_X$, но и некоторая полунорма $\rho(\cdot)$. Если полунорма $\rho(\cdot)$ является ограниченной, т.е. $\rho(\tau) \le C\|\tau\| \quad \forall \tau \in X$, где константа $C > 0$ не зависит от τ, а гильбертово пространство X полным относительно полунормы $\rho(\cdot)$, то X называется *S-пространством* (см., например, [14, с.77]).

Известно (см., например, [13, п.2.3.2], [14, п.5.15]), что если X — вещественное функциональное S-пространство, вложенное в пространство непрерывных функций $C[a,b]$, то для любого $z \in Z$ экстремаль в задаче (2.1) имеет следующий вид:

$$\sigma(x) = q(x) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \ \varphi_j(G(x,\cdot)),$$

где $q \in \ker T$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N \in X^*$ — фиксированный набор линейно независимых функционалов, $G(x,t)$ — воспроизводящее ядро S-пространства X

(см., например, [13, p.27]), $\varphi_j G(x,\cdot)$ означает, что функционал φ_j действует на вторую переменную, а скаляры $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ однозначно определяются с помощью следующего дополнительного условия:

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_j(u) = 0 \qquad \forall u \in \ker T.$$

В нашем случае $X = W_2^m[a,b]$, $Y = L_2[a,b]$, $Z = \mathbb{R}^N$, $T = \mathcal{L}_m$ вида (1.1) с коэффициентами $p_i(x) \in C^{(2m)}[a,b]$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, $W_2^m[a,b]$ вложено в пространство непрерывных функций $C[a,b]$ (теорема вложения Соболева), полунорма функции f — это

$$\rho(f) = \left(\int\limits_a^b |\mathcal{L}_m f(x)|^2\, dx \right)^{1/2},$$

а функционалы являются значениями интерполируемой функции в точках сетки Δ_N.

Нетрудно видеть, что полунорма ограничена на $W_2^m[a,b]$. Действительно, применяя неравенство Минковского, получаем

$$\left(\int\limits_a^b |\mathcal{L}_m f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \le \left(\int\limits_a^b |f^{(m)}(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$+ \left(\int\limits_a^b |p_1(x) f^{(m-1)}(x)|^2\, dx \right)^{1/2} + \ldots + \left(\int\limits_a^b |p_m(x) f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\le M \|f\|_{W_2^m[a,b]},$$

где $M = \max\{1, \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} \max\limits_{x\in J} |p_i(x)|\}$.

Воспроизводящее ядро в нашем случае известно (см., например, [14, с.93-94]): оно является решением задачи Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_m^* \mathcal{L}_m\, g_t(x) = \delta(x-t), \\ g_t^{(i)}(a) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,2m-1, \end{array} \right. \tag{2.5}$$

где $\delta(x-t)$ — δ-функция, сосредоточенная в точке $x = t$, $\mathcal{L}_m^*$ — формально сопряжённый дифференциальный оператор для оператора $\mathcal{L}_m$:

$$\mathcal{L}_m^* y(x) = (-1)^m y^{(m)}(x) + (-1)^{m-1} \big(p_1(x) y(x)\big)^{(m-1)} + \ldots + p_m(x) y(x)$$

и дифференциальные операторы применяются по переменной x. Более подробную информацию о формально сопряжённых дифференциальных операторах можно найти, например, в [17, гл. 1].

Существование и единственность функции $g_t(x)$ следуют из того факта, что "классическая" задача Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}_m^* \mathcal{L}_m \, g(x) = 0, \quad g \in C^{(2m)}[a,b], \\ g^{(i)}(a) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m-1, \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Из (2.5) и определения функции Грина замечаем, что воспроизводящее ядро $G(x,t) = g_t(x)$ представляет собой функцию Грина задачи Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}_m^* \mathcal{L}_m \, g(x) = F(x), \\ g^{(i)}(a) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m-1, \end{cases} \tag{2.6}$$

и одновременно является $\mathcal{L}$-сплайном минимального дефекта, соответствующим дифференциальному оператору $\mathcal{L}_m^* \mathcal{L}_m$, с единственным узлом в точке $x = t$.

Заметим, что $G(x, x_j) = 0$, если $x < x_j$. Действительно, согласно её определению функция Грина $G(x,t)$ при $x < t$ является решением задачи Коши $\mathcal{L}_m^* \mathcal{L}_m \, G(x,t) = 0$ с начальным условием $\partial^k \, G(x,t)/\partial x^k \big|_{x=a} = 0$, $(k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$ и нетрудно видеть, что $G(x,t) \equiv 0$ при $a \le x < t$.

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть сетка Δ_N является "достаточно густой". Тогда решение Задачи 1 существует, единственно и имеет вид*

$$\sigma(x) = q(x) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, G(x, x_j), \tag{2.7}$$

где $G(x,t)$ — функция Грина задачи Коши (2.6), $q \in \ker \mathcal{L}_m$ и коэффициенты $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ однозначно определяются из интерполяции $\sigma(x_i) = z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и дополнительного условия

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j u(x_j) = 0 \qquad \forall u \in \ker \mathcal{L}_m. \tag{2.8}$$

Определение. *Натуральным $\mathcal{L}$-сплайном* минимального дефекта, соответствующим дифференциальному оператору $\mathcal{L}_{2m} = \mathcal{L}_m^* \mathcal{L}_m$, с узлами в точках сетки Δ_N будем называть функцию $S(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) $S(x) \in C^{(2m-2)}[a,b]$,

2) $\mathcal{L}_m^*\mathcal{L}_m\ S(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (x_k, x_{k+1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$
3) $S(x) \in \ker \mathcal{L}_m$ для $x \in [a, x_1]$ и $x \in [x_N, b]$,
4) $S(x)$ интерполирует в узлах сетки Δ_N, т.е. $S(x_i) = z_i, \ (i = 1, 2, \ldots, N)$.

Таким образом, функция $\sigma(x)$ из Леммы 2 представляет собой натуральный $\mathcal{L}$-сплайн минимального дефекта, соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_{2m} = \mathcal{L}_m^*\mathcal{L}_m$ с узлами в точках сетки Δ_N.

Замечание. *Если $\mathcal{L}_m = D^m$, то натуральный $\mathcal{L}$-сплайн является известным натуральным полиномиальным сплайном степени $2m - 1$ и*

$$G(x,t) = \frac{(-1)^m (x-t)_+^{2m-1}}{(2m-1)!}, \quad (x-t)_+ = \max\{x - t, 0\}.$$

Таким образом, в этом случае (2.7) представляет собой хорошо известную форму представления натурального полиномиального сплайна степени $2m - 1$ через усечённые функции $\{(x - x_j)_+^{2m-1} : j = 1, 2, \ldots, N\}$ (см., например, [9]).

§ 3. Натуральные $\mathcal{L}$-сплайны

Пусть $\{v_k(x)\}_{k=1}^m$ — произвольный базис подпространства $\ker \mathcal{L}_m$. Тогда равенство (2.7) переписывается в виде

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \ G(x, x_j) \ + \sum_{k=1}^{m} \mu_k v_k(x) \tag{3.1}$$

и из Леммы 2 для нахождения неизвестных коэффициентов $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^m$ получаем систему $N + m$ линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j \ G(x_i, x_j) + \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k v_k(x_i) = z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \\ \sum\limits_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu v_k(x_\nu) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

с квадратной матрицей размером $m + M$. Матрицу $\mathcal{A}$ этой системы будем называть *определяющей матрицей* натурального $\mathcal{L}$-сплайна. Ввиду существования и единственности натурального $\mathcal{L}$-сплайна $\sigma(x)$, определитель матрицы $\mathcal{A}$ отличен от нуля. Матрица $\mathcal{A}$ состоит из четырёх блоков

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} G & V \\ \hline V^t & O \end{array} \right).$$

где

$$G = \Big\{ G(x_i, x_j) \Big\}_{i,j=1}^{N},$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1(x_1) & v_2(x_1) & \cdots & v_m(x_1) \\ v_1(x_2) & v_2(x_2) & \cdots & v_m(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1(x_N) & v_2(x_N) & \cdots & v_m(x_N) \end{pmatrix},$$

O — нулевой блок размером $m \times m$, а верхний индекс t означает операцию транспонирования.

Теперь получим представление натурального $\mathcal{L}$-сплайна $\sigma(x)$ через фундаментальные натуральные $\mathcal{L}$-сплайны $\{Q_k(x)\}_{k=1}^N$, т.е. натуральные $\mathcal{L}$-сплайны на сетке Δ_N, для которых $Q_k(x_j) = \delta_{kj}$, $(k, j = 1, 2, \ldots, N)$, где δ_{kj} — символ Кронекера. Пусть

$$\big\{G(x; x_1), \ldots, G(x; x_N), v_1(x), v_2(x), \cdots, v_m(x)\big\}.$$

Последовательно заменяем k-ю $(k = 1, 2, \ldots, N)$ строку определяющей матрицы этой строкой. Получившиеся матрицы обозначаем через $\mathcal{A}_k(x)$ и полагаем

$$Q_k(x) = \frac{\det \mathcal{A}_k(x)}{\det \mathcal{A}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Функции $\{Q_k(x)\}_{k=1}^N$ являются натуральными $\mathcal{L}$-сплайнами, т.к. разложение определителя $\det \mathcal{A}_k(x)$ по элементам k-й строки приводит к функции вида (3.1). Также эти функции являются фундаментальными интерполянтами, поскольку имеют место равенства $\det \mathcal{A}_k(x_j) = \delta_{kj} \det \mathcal{A}$, $(k, j = 1, 2, \ldots, N)$. Натуральный $\mathcal{L}$-сплайн $\sigma(x)$ является линейной комбинацией фундаментальных натуральных $\mathcal{L}$-сплайнов $\{Q_k(x)\}_{k=1}^N$, т.е.

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{N} z_k Q_k(x),$$

где $\{z_k\}_{k=1}^N$ — интерполируемые данные.

Таким образом, в нашем распоряжении имеются следующие два представления экстремали Задачи 1:

$$\sigma(x) = q(x) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \; G(x, x_j) \quad \text{и} \quad \sigma(x) = \sum_{k=1}^{N} z_k Q_k(x).$$

Теперь применяем дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ к каждому из этих представлений. Поскольку $q \in \ker \mathcal{L}_m$, в результате получаем

$$\mathcal{L}_m \sigma(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \; \mathcal{L}_m G(x, x_j) \tag{3.2}$$

и

$$\mathcal{L}_m\sigma(x) = \sum_{k=1}^{N} z_k\ \mathcal{L}_m Q_k(x) = \left(\frac{1}{\det\mathcal{A}}\right)\ \sum_{k=1}^{N} z_k\ \mathcal{L}_m(\det\mathcal{A}_k(x)). \tag{3.3}$$

Функция $\mathcal{L}_m(\det\mathcal{A}_k(x))$ — это определитель, в котором дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ применён к элементам его k-й строки (единственной строки, зависящей от x). Воспользовавшись известным правилом дифференцирования функциональных определителей (см., например, [18, с.98]) и разложив получившийся определитель по элементам k-й строки, имеем

$$\mathcal{L}_m\left(\det\mathcal{A}_k(x)\right) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{kj}\ \mathcal{L}_m G(x, x_j), \tag{3.4}$$

где $\{\alpha_{kj}\}$ — соответствующие алгебраические дополнения, взятые с их знаками. Подставив (3.4) в (3.3), получаем

$$\mathcal{L}_m\sigma(x) = \left(\frac{1}{\det\mathcal{A}}\right)\ \sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N} z_k\alpha_{kj}\Big)\mathcal{L}_m G(x, x_j). \tag{3.5}$$

Из равенств (3.2) и (3.5) и единственности натурального $\mathcal{L}$-сплайна приходим к выражениям коэффициентов $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ через интерполируемые значения

$$\lambda_j = \frac{1}{\det\mathcal{A}}\ \sum_{k=1}^{N}\alpha_{kj}z_k, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.6}$$

в которых величины $\{\alpha_{kj}\}$ не зависят от $\{z_k\}_{k=1}^N$.

Теперь найдём квадрат L_2-нормы функции $\mathcal{L}_m\sigma(x)$.

Лемма 3. *Если сетка точек интерполяции Δ_N является "достаточно густой" , то справедливо следующее равенство:*

$$\|\mathcal{L}_m\sigma(x)\|_2^2 = \sum_{k,i=1}^{N} c_{ki} z_k z_i,$$

где

$$c_{ki} = \left(\frac{1}{\det\mathcal{A}}\right)^2 \cdot \sum_{j,\nu=1}^{N} q_{j\nu}\ \alpha_{kj}\ \alpha_{i\nu}, \quad (k, i = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.7}$$

$$q_{j\nu} = \int\limits_{x_{\max\{j,\nu\}}}^{b} \big(\mathcal{L}_m G(x, x_j)\big)\big(\mathcal{L}_m G(x, x_\nu)\big)\,dx, \ \ (j, \nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.8}$$

а величины $\{\alpha_{ks}\}$ определены в (3.4).

Доказательство. Пусть сетка точек интерполяции Δ_N является "достаточно густой" . Тогда согласно Лемме 1 решение $\sigma(x)$ Задачи 1 существует и является единственным, а в силу Леммы 2 оно задаётся равенством (2.7).

Вычисляем $\|\mathcal{L}_m\sigma(x)\|_2^2$ используя (2.7):

$$\|\mathcal{L}_m\sigma(x)\|_2^2 = \int\limits_a^b \Big|\sum_{j=1}^N \lambda_j\ \mathcal{L}_m G(x,x_j)\Big|^2\,dx$$

$$= \sum_{j,\nu=1}^N \lambda_j\lambda_\nu\ \int\limits_a^b \Big(\mathcal{L}_m G(x,x_j)\Big)\Big(\mathcal{L}_m G(x,x_\nu)\Big)\,dx = \sum_{j,\nu=1}^N \lambda_j\lambda_\nu q_{j\nu},$$

где $q_{j\nu} = \int\limits_a^b \Big(\mathcal{L}_m G(x,x_j)\Big)\Big(\mathcal{L}_m G(x,x_\nu)\Big)\,dx, \quad (j,\nu = 1,2,\ldots,N).$

Воспользовавшись соотношениями (3.6), получаем

$$\|\mathcal{L}_m\sigma(x)\|_2^2 = \left(\frac{1}{\det\mathcal{A}}\right)^2 \sum_{j,\nu=1}^N q_{j\nu}\Big(\sum_{k=1}^N \alpha_{kj}z_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^N \alpha_{k\nu}z_k\Big)$$

$$= \left(\frac{1}{\det\mathcal{A}}\right)^2 \sum_{j,\nu=1}^N q_{j\nu}\sum_{k,i=1}^N \alpha_{kj}\alpha_{i\nu}z_kz_i = \left(\frac{1}{\det\mathcal{A}}\right)^2 \sum_{k,i=1}^N z_kz_i\sum_{j,\nu=1}^N q_{j\nu}\alpha_{kj}\alpha_{i\nu}$$

$$= \sum_{k,i=1}^N c_{ki}z_kz_i.$$

Т.к. $G(x,t) = 0$ при $x < t$, то

$$q_{j\nu} = \int\limits_a^b \Big(\mathcal{L}_m G(x,x_j)\Big)\Big(\mathcal{L}_m G(x,x_\nu)\Big)\,dx$$

$$= \int\limits_{x_{\max\{j,\nu\}}}^b \Big(\mathcal{L}_m G(x,x_j)\Big)\Big(\mathcal{L}_m G(x,x_\nu)\Big)\,dx.$$

$(j,\nu = 1,2,\ldots,N).$ □

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 96-118
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 96-118

§ 4. Основной результат

Переходим к формулировке и доказательству основного результата настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}_m$ — линейный дифференциальный оператор порядка m $(m \geq 2)$ вида (1.1) с коэффициентами $p_i \in C^{(2m)}[a,b]$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$,*

$$M = \max\{1, \max_{i=1,2,\ldots,m} \max_{x\in[a,b]} |p_i(x)|\}$$

и сетка точек интерполяции

$$\Delta_N: \ x_1 < x_2 < \ldots < x_N, \quad x_1 > a, \ x_N < b$$

такова, что существует разбиение полуинтервала $[x_1, x_N)$ на s непересекающихся подинтервалов $J_1, J_2, \ldots, J_s$ с длинами

$$0 < |J_i| < \min\{1, (mM)^{-1}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

такое, что по крайней мере на одном из подинтервалов такого разбиения находятся m узлов сетки Δ_N. Пусть числа $\{c_{ki}\}_{k,i=1}^N$ заданы соотношениями (3.7), (3.8). Тогда

$$\mathcal{B}_N(\mathcal{L}_m) = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{|\det \mathcal{A}|},$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольший положительный корень уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{12} & c_{22}-\lambda & \cdots & c_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1N} & c_{2N} & \cdots & c_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

относительно λ.

Доказательство. Пусть сетка Δ_N и дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ удовлетворяют условиям Теоремы 1. Тогда в силу Леммы 1 Задача 1 имеет единственное решение $\sigma(x)$ для любого набора интерполируемых данных $\{z_k\}_{k=1}^N \in \mathfrak{M}_N$. Согласно Лемме 2 это решение является натуральным $\mathcal{L}$-сплайном и выражается формулой (2.7). В силу Леммы 3 имеем

$$\|\mathcal{L}_m\sigma(x)\|_2^2 = \sum_{k,i=1}^{N} c_{ki} z_k z_i,$$

где числа $\{c_{ki}\}_{k,i=1}^N$ не зависят от интерполируемых данных и задаются соотношениями (3.7), (3.8).

Таким образом, квадрат L_2-нормы функции $\mathcal{L}_m\sigma(x)$ является квадратичной формой от интерполируемых значений $\{z_k\}_{k=1}^N$. Следовательно, Задача 2 сводится к нахождению максимального значения положительной квадратичной формы на единичном шаре пространства l_2^N:

$$\begin{cases} V(z_1, z_2, \ldots, z_N) = \sum\limits_{k,i=1}^{N} c_{ki} z_k z_i \ \to \ \max \\ \sum\limits_{k=1}^{N} |z_k|^2 \le 1. \end{cases}$$

В [10, с.224–225] показано, что максимум квадратичной формы достигается на границе множества $\mathfrak{M}_N$, т.е. в некоторых точках $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{N} |z_k|^2 = 1$. В результате приходим к задаче максимизации квадратичной формы $V(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ на единичной сфере в l_2^N. Известно (см., например, [19, с.476–477]), что решением этой задачи является наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы квадратичной формы, т.е. наибольший корень уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1N} & c_{2N} & \cdots & c_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку матрица вещественной квадратичной формы симметричная, все её собственные значения вещественные (см., например, [20, §36]). Кроме того, эта квадратичная форма представляет собой квадрат L_2-нормы функции $\mathcal{L}_m\sigma(x)$, поэтому $\lambda_{\max} > 0$. $\square$

В заключение этого раздела заметим, что для любой симметричной матрицы максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ можно вычислить численными методами или оценить (см., например, [21], [22] и приведённую там библиографию).

§ 5. Обсуждения и комментарии

1) Экстремальный набор интерполируемых данных $\{z_k\}_{k=1}^N$ в Задаче 2, вообще говоря, не единственный и его можно найти из системы линейных уравнений, которая получается дифференцированием функции Лагранжа

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_N) = V(z_1, z_2, \ldots, z_N) - \lambda(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_N^2)$$

при $\lambda = \lambda_{\max}$:

$$\frac{\partial F(z_1, z_2, \dots, z_N)}{\partial z_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

2) Если $\mathcal{L}_m$ — неосциллирующий на $[a, b]$ линейный дифференциальный оператор, то в Теореме 1 достаточно взять $s = 1$. Известно, что если дифференциальный оператор $\mathcal{L}_m$ неосциллирующий, то дифференциальные операторы $\mathcal{L}_m^*$ и $\mathcal{L}_{2m} = \mathcal{L}_m^* \mathcal{L}_m$ также являются неосциллирующими (см. [16, p.94,104]). Таким образом, для неосциллирующих на $[a, b]$ линейных дифференциальных операторов $\mathcal{L}_m$ вида (1.1) Теорема 1 имеет место для любой сетки Δ_N при $N > m$.

3) В работах С.Карлина и ряда других авторов (см., например, [23, p.520-521], [24, гл.XI, §9] и приведённую там библиографию) был реализован следующий подход: задана система Маркова, по ней строится линейный дифференциальный оператор и решается интерполяционная задача типа Фавара (Задача 1). Фактически это означает, что Задача 1 решалась на промежутке неосцилляции дифференциального оператора. Было доказано, что экстремалью в этой задаче является натуральный чебышевский сплайн, который выражается через положительные функции $\{v_i(x)\}_{i=1}^m$, входящие в факторизацию (2.3) построенного неосциллирующего линейного дифференциального оператора.

В настоящей работе сразу задаётся именно дифференциальный оператор, который при этом не обязан быть неосциллирующим на всём промежутке $[a, b]$, а базис его ядра не обязан быть системой Маркова.

4) Некоторые результаты, относящиеся к неосцилляции дифференциальных операторов, применялись в задачах теории аппроксимации, в частности, для изучения аппроксимативных свойств $\mathcal{L}$-сплайнов и вычисления поперечников. В связи с этими направлениями исследований, помимо упомянутых выше монографий [23], [24], отметим также работы Х.Морше [25], Нгуен Тхи Тхьеу Хоа [26], [27] и автора [28]. Заметим также, что сам термин "неосцилляция" в некоторых работах не использовался.

5) В настоящей работе при постановке Задач 1 и 2 мы не накладывали краевые условия. Однако, можно рассматривать Задачи 1 и 2 при наличии краевых условий в точках $x = a$ и $x = b$. Для различных типов краевых условий решение Задачи 1 является хорошо известным в теории интерполяционных сплайнов результатом — свойством минимальной нормы, впервые установленным в работе [29] для дифференциального оператора D^3, позже — для многих других дифференциальных операторов (см., например, [30, п.5.4, п.6.4]). Однако, Задача 2 при этом не рассматривалась.

6) Задача 2 для дифференциального оператора D^m при периодических краевых условиях $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b)$ $(i = 1, 2, \dots, m-1)$ была изучена в

работе автора [31], в которой для равномерной сетки точек интерполяции величина, аналогичная $\mathcal{B}_N(D^m)$, была вычислена точно через максимальное собственное значение некоторой матрицы. При этом сама величина $\lambda_{\max}$ была выписана в явном виде как сумма некоторого числового ряда. Это удалось сделать благодаря тому, что матрица квадратичной формы в периодической задаче на равномерной сетке является циркулянтом, а для циркулянта известно явное выражение его спектра (см. [32]).

Список литературы

1. *Favard J.* Sur l'interpolation // *Math. Pures Appl.* 1940. V. 19, N 1–4. P. 281—306.

2. *de Boor C.* How small can one make the derivatives of an interpolating function? // *J. Approx. Theory.* 1975, V. 13, N 2. P. 105—116.

3. *Тихомиров В. М., Боянов Б. Д.* О некоторых выпуклых задачах теории приближения // *Serdika. Българско матем. списание.* 1979. Т. 5. С. 83—96.

4. *Fisher S. D., Jerome J. W. Minimum norm extremals in function spaces: with applications to classical and modern analysis* / Lecture Notes in Math., V. 479. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

5. *Субботин Ю. Н.* Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // *Труды МИАН СССР.* 1967. Т. 88. С. 30—60.

6. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // *Труды МИАН СССР.* 1975. Т. 138. С. 118—173.

7. *Шевалдин В. Т.* Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // *Труды МИАН СССР.* 1983. Т. 164. С. 203—240.

8. *Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т.* Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // *Труды ИММ УрО РАН.* 2018. Т. 24, № 3. С. 200—225.

9. *Малоземов В. Н., Певный А. Б. Полиномиальные сплайны.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.

10. *Новиков С. И.* Оптимальная интерполяция на отрезке с наименьшим значением среднеквадратичной нормы r-ой производной // *Труды ИММ УрО РАН.* 2023. Т. 29, № 4. С. 217—228.

11. *Novikov S. I.* Interpolation with minimum values of L_2-norm of differential operators // *Ural Mathematical Journal.* 2024. V. 10, N 2. P. 107—120.

12. *Новиков С.И.* Об одной задаче интерполяции с минимальным значением L_2-нормы оператора Лапласа // *Труды ИММ УрО РАН.* 2022. Т. 28, № 4. С. 143—153.

13. *Bezhaev A. Yu., Vasilenko V. A. Variation spline theory.* Ser. Numer. Anal. Bulletin N 3. Novosibirsk: NCC Publisher, 1993. .

14. *Роженко А. И. Абстрактная теория сплайнов.* Новосибирск: НГУ, 1999.

15. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x=0$ // *Успехи матем. наук.* 1969. Т. 24, № 2(146). С. 43—96.

16. *Coppel W. Disconjugacy* / Lecture Notes in Math., V. 220. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

17. *Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969.

18. *Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* М.: Наука, 1972.

19. *Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.* М.: Наука, 1970. Т. 1.

20. *Курош А. Г. Курс высшей алгебры.* М.: Наука, 1971.

21. *Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения.* М.: Из-во иностр. литер., 1960.

22. *Tarazaga P.* Eigenvalue estimates for symmetric matrices // *Linear Algebra Appl.* 1990. V. 135, N 1. P. 171-–179.

23. *Karlin S. Total positivity.* Stanford, CA: Stanford University Press, 1968. V. 1.

24. *Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.* М.: Наука, 1976.

25. *Morsche H. Interpolational and extremal properties of $\mathcal{L}$-splines.* / Dissertation. Eindhoven University of Technology. Eindhoven. 1982.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 96-118
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 96-118

26. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа* Осцилляционные свойства дифференциальных операторов и операторов свертки и некоторые приложения // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1989. Т. 53, № 3. С. 590—605.

27. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа* Оператор $D(D^2 + 1^2)\dots(D^2 + n^2)$ и тригонометрическая интерполяция // *Analysis Mathematica.* 1989. V. 15, N 4. P. 291—306.

28. *Новиков С. И.* Периодический аналог теоремы Ролля для дифференциальных операторов и приближение L-сплайнами // *Матем. заметки.* 1994. Т. 56, № 4. С. 102—113.

29. *Holladay J.* A smoothest curve approximation // *Math. Tables Aids Comput.* 1957. V. 11. P. 233—243.

30. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения.* М.: Мир, 1972.

31. *Новиков С. И.* Периодическая интерполяция с минимальным значением нормы m-й производной // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2006. Т. 9, № 2. С. 165—172.

32. *Muir T. A treatise on the theory of determinants.* New York: Dover Publications Inc., 1960.

References

1. *Favard J.* Sur l'interpolation // *Math. Pures Appl.* 1940. V. 19, N 1–4. P. 281—306.

2. *de Boor C.* How small can one make the derivatives of an interpolating function? // *J. Approx. Theory.* 1975, V. 13, N 2. P. 105—116.

3. *Tikhomirov V. M., Bojanov B. D.* On some convex problems of approximation theory // *Serdika.* 1979. V. 5. P. 83-–96. (in Russian)

4. *Fisher S. D., Jerome J. W. Minimum norm extremals in function spaces: with applications to classical and modern analysis* / Lecture Notes in Math., V. 479. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

5. *Subbotin Yu. N.* Functional interpolation in the mean with smallest n-derivative // *Proc. Steklov Inst. Math.* 1967. V. 88. P. 31—63.

6. *Subbotin Yu. N.* Extremal problems of functional interpolation and interpolation in the mean splines // *Proc. Steklov Inst. Math.* 1977. V. 138. P. 127–185.

7. *Shevaldin V. T.* Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators // *Proc. Steklov Inst. Math.* 1983. V. 164. P. 203–240. (in Russian)

8. *Subbotin Yu. N., Novikov S. I., Shevaldin V. T.* Extremal function interpolation and splines // *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2018. V. 24, N 3. P. 200—225. (in Russian)

9. *Malozyomov V. N., Pevny A. B. Polynomial Splines.* Leningrad: Leningrad State University, 1986. (in Russian)

10. *Novikov S. I.* Optimal interpolation on an interval with the smallest mean-square norm of the r-th derivative // *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN* 2023. V. 29, N 4. P. 217—228. (in Russian)

11. *Novikov S. I.* Interpolation with minimum values of L_2-norm of differential operators // *Ural Mathematical Journal.* 2024. V. 10, N 2. P. 107—120.

12. *Novikov S. I.* On an interpolation problem with the smallest L_2-norm of the Laplace operator // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2022. V. 319, Suppl. 1. P. S193–S203.

13. *Bezhaev A. Yu., Vasilenko V. A. Variation spline theory.* Ser. Numer. Anal. Bulletin N 3. Novosibirsk: NCC Publisher, 1993. .

14. *Rozhenko A. I. Abstract Theory of Splines.* Novosibirsk: Publ. Center of Novosibirsk State University, 1999. (in Russian)

15. *Levin A. Yu.* Non-oscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$ // *Russian Math. Surveys.* 1969. V. 24, N. 2. P. 43–99.

16. *Coppel W. Disconjugacy* / Lecture Notes in Math., V. 220. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

17. *Naimark M. A. Linear Differential Operators.* NY: Frederick Ungar, 1969.

18. *Demidovich B. P. Problems in Mathematical Analysis.* Moscow: MIR Publishers, 1989.

19. *Fichtenholz G. M. Course of Differential and Integral Calculus.* Moscow: Nauka Publ., 1970. V. 1. (in Russian)

20. *Kurosh A. Course of higher Algebra.* Moscow: Nauka Publ., 1971. (in Russian)

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 96-118
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 96-118

21. *Parodi M. La Localisation des Valeurs Caracteristiques des Matrices et ses Applications.* Paris: Gauthier Villars, 1959.

22. *Tarazaga P.* Eigenvalue estimates for symmetric matrices // *Linear Algebra Appl.* 1990. V. 135, N 1. P. 171-–179.

23. *Karlin S. Total positivity.* Stanford, CA: Stanford University Press, 1968. V. 1.

24. *Karlin S., Studden W. Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics.* Pure and Appl. Math., V. 15. New York: Interscience, 1966.

25. *Morsche H. Interpolational and extremal properties of $\mathcal{L}$-splines.* / Dissertation. Eindhoven University of Technology. Eindhoven. 1982.

26. *Nguyen Thi Thieu Hoa.* Oscillation properties of differential operators and convolution operators, and some applications // *Math. USSR-Izv.* 1990. V. 34, N. 3. P. 609–626.

27. *Nguyen Thi Thieu Hoa.* Operator $D(D^2+1^2)\dots(D^2+n^2)$ and trigonometric interpolation // *Analysis Mathematica.* 1989. V. 15, N 4. P. 291—306. (in Russian)

28. *Novikov S. I.* The periodic analog of Rolle's theorem for differential operators and approximation by L-splines // *Math. Notes.* 1994. V. 56, N 3-4, P. 1061—1068.

29. *Holladay J.* A smoothest curve approximation // *Math. Tables Aids Comput.* 1957. V. 11. P. 233—243.

30. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Applications.* New York and London: Acad. Press, 1967.

31. *Novikov S. I.* Periodic interpolation with minimal norm of m-th derivative // *Sib. Zh. Vychisl. Math.* 2006. V. 9, N 2. P. 165—172. (in Russian)

32. *Muir T. A treatise on the theory of determinants.* New York: Dover Publications Inc., 1960.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 96-118
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 96-118

Информация об авторе

Сергей Игоревич Новиков, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

SPIN 3981-6579 AuthorID: 9780

Scopus Author ID 16421932500

Author Information

Sergey I. Novikov, Candidate of Mathematics, Senior Reseacher

SPIN 3981-6579 AuthorID: 9780

Scopus Author ID 16421932500

*Статья поступила в редакцию 18.09.2025;
одобрена после рецензирования 31.10.2025; принята к публикации 21.01.2026*

*The article was submitted 18.09.2025;
approved after reviewing 31.10.2025; accepted for publication 21.01.2026*